素数の3乗の和について　(解析的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):

Kawada, Koichi

CITATION:

Kawada, Koichi. 素数の3乗の和について　(解析的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2004, 1384: 215-220

ISSUE DATE:

2004-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/25754

数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 215-220

素数の3乗の和について.

Koichi KAWADA (川田 浩一)
Faculty of Education, Iwate University
(岩手大学 教育学部)

1. 素数をわたる Weyl 和をめぐって.

以下，p は添え字の有無によらず常に素数を表すものとする．P は大きい実数であるとし，文字 ε に関しては通常の慣習に従う．つまり，記号 $\ll$ 等で省略される定数が ε に依存し得るという約束の下で，ε を含む不等式は，十分小さい任意に固定した正数 ε に対してそれが成立することを意味する．また，α を実数変数とし，$e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$ とする．ここで π は円周率で，i は虚数単位で，e は $\cdots$ いや，そんなことをいちいち言う必要はあるまい.

自然数 k に対して,

$$f_k(\alpha)=\sum_{P<p\le 2P} e(p^k\alpha)$$

とおく．本節の表題にある「素数をわたる Weyl 和」とは，この $f_k(\alpha)$ のことを指したつもりである．$f_k(\alpha)$ のような指数和は，それ自身が興味のもたれる研究対象であると思うが，筆者は素数の k 乗の和による自然数の表現を扱う Waring-Goldbach 問題との関係から，とくに興味をもっており，数年前，Wooley さんとの共同研究 [5] で次の結果を得た．$k\ge 4$ のとき，互いに素な整数 q と a が

$$|q\alpha-a|\le P^{-k/2} \quad \text{かつ} \quad 1\le q\le P^{k/2} \tag{1}$$

をみたすならば,

$$f_k(\alpha)\ll P^{1-2^{-k-1}+\varepsilon}+\frac{P(\log P)^4q^{\varepsilon}w_k(q)^{1/2}}{(1+|\alpha-a/q|)^{1/2}} \tag{2}$$

となる ([5], Lemma 3.3). ここでは不要と思うので $w_k(q)$ の厳密な定義は省略するが, $w_k(q)$ は q について乗法的な関数であって, 各 k に対して $q^{-1/2} \le w_k(q) \ll q^{-1/k}$ をみたす. 雑に言って, q について平均すると $w_k(q)$ はだいたい $O(q^{-1/2})$ くらいの大きさなので, 応用上は(2) の右辺第2項の $w_k(q)$ を $q^{-1/2}$ で置き換えた不等式が得られたと思っても大丈夫である. いずれにしても, (2) のような評価においては, 右辺の第1項のもつ意味が大きい.

いま $k \ge 4$ としたが, $k = 3$ の場合は [5] の議論の中に引っかかる部分があり, (2) を証明することはできなかったのである. 因みに $k = 2$ の場合は, (2) において $k = 2$ とした評価を Ghosh [2] と Harman [3] が独立に, [5] より 20年も前に得ていた*.

$k = 3$ なら, (2) の右辺第1項は $P^{15/16+\varepsilon}$ であるが, Wooley が [10] において指摘したように, Kawada-Wooley [5] の方法では, その指数にある 15/16 を 23/24 に置き換えた不等式までしか証明できない. とはいえ, 指数を 23/24 とした結果 (Wooley [10], Lemma 2.3) でも, 本稿完成時点†で既に出版されている結果としては最善のものである.

なんとか $k = 3$ の場合にも(2) を証明したい — といろいろやってみた結果, Kawada-Wooley [5] の方法に 2, 3 の新しい工夫を加えることによって, とうとう 2003年の2月にそれに成功することができた. この結果については2003年3月の研究集会で発表したので, 2003年秋の今回の京都での研究集会では, その評価を3乗数の Waring-Goldbach 問題に応用して得られる帰結について話をさせていただこうと思っていたのである.

ところで, 2003年4月ごろから数ヶ月間, 筑波大学の三河さんの所に滞在していた Tolev 氏が, 6月の中ごろに盛岡にいらした. 2泊3日の滞在の間, もちろんいろいろとお話をしたが, そのとき, 最近どんな結果を得たかと聞かれ, (2) が $k = 3$ に対しても証明できたこととその応用について話をした. すると, 以前彼の学生だった Kumchev 氏が, 最近似たような仕事をしていたよと言って, Internet を使っていろいろと調べ, 関係するプレプリントを2つばかりダウンロードしてくれた. それを見てびっくり! (2) よりいい結果を, Kumchev は得ていたのである.

そのときは(2) の $k = 3$ の場合を証明した論文が, Introduction を除い

---

*$k = 2$ だと, 実はきっかり $w_2(q) = q^{-1/2}$ である. Ghosh [2] や Harman [3] は(2) のようには書いていないが, それと同値な結果を得ている.

†2004年4月20日. これは筆者の39歳の誕生日である. 因みに本原稿の当初の締め切りは2003年12月26日とされていた. 恒例となり恐縮至極だが, 原稿の大幅な遅延を深くお詫びするとともに, 研究代表者・秋山茂樹先生の寛大な対処に厚く御礼を申し上げる次第である.

て完成していた状況であったし，言うまでもないことだが，まあ，がっくりした．同等な結果なら，独立に証明したのだから発表しただろうが，超えられたとわかった以上，劣るものを人目にさらすのはやめることにした．

今回の研究集会で発表する予定だった応用についても，基になる $f_3(\alpha)$ の評価に差があるわけだから，当然 Kumchev は上回る結果を導いていたが，発表の方は，そういう Kumchev の仕事も含めて，予定通りの話題について話をさせていただくこととした．こういう事情だし，負けた話をするのも許されるだろう，と思ったので．

さて，その Kumchev の $f_k(\alpha)$ の評価は次の通りである．$\rho_2 = 1/8$, $\rho_3 = 1/14$ とし，$k \geq 4$ に対しては $\rho_k = 1/(3 \cdot 2^{k-1})$ とすると，$k \geq 2$ に対して，ある定数 c があって，(1) の下で[‡]，

$$f_k(\alpha) \ll P^{1-\rho_k+\varepsilon} + \frac{P(\log P)^c q^\varepsilon}{(q + |q\alpha - a|)^{1/2}} \tag{3}$$

となる (Kumchev [6], Theorem 3)．Kumchev の(3) の証明について，一言述べると，Baker-Harman [1] の方法と Kawada-Wooley [5] の方法に加えて，Dirichlet 多項式の評価のような解析的な手法も用いる，という感じである．

この(3) の右辺の第 1 項は，$k \geq 3$ に対して(2) より良い．$k = 2$ のときは Ghosh [2] や Harman [3] の結果と右辺第 1 項は同じだが，右辺第 2 項は $k \geq 2$ のとき常に Kumchev の(3) の方が(2) より良い．その(3) の $\log P$ の指数の c はいくつであろうと応用上関係ないし，雑に言うと，(2) の右辺第 2 項は，(3) の右辺第 2 項の分母の $(q + |q\alpha - a|)^{1/2}$ を $(q + |q\alpha - a|)^{1/4}$ に変えたものと，ほぼ同等と言える．先ほど右辺第 1 項の方が重要と書いたが，右辺第 2 項もここまで良くなると，応用上いろいろ楽で，便利である．

いずれにしても Kumchev の結果(3) は，$k \geq 2$ に対する $f_k(\alpha)$ の評価として現時点で最も良いものである[§]．個人的には，$f_k(\alpha)$ の評価を改良されてがっかりした，という面もあるけれど，それよりもその結果の強さにショックを受けた，というのが正直なところである．この Kumchev の定理(3) は，かなり素晴らしい成果であると思う．

[‡]Kumchev [6] は，(1) に当たる条件を少し違う形で書いているが，どちらでも同じことである．

[§]因みに，現時点で $k = 1$ のときに最も良い評価は，(3) において $\rho_1 = 1/5$, $c = 6$ として，さらに (大したことではないが)q^ε を取り除いたもので，Vaughan [9] による．

2. 素数の3乗の和に付随する例外集合の評価

それでは，前節で触れた $f_3(\alpha)$ の評価の応用の話に移ろう．まず，$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし，各自然数 s に対して，

$$\mathcal{N}_s = \{n \in \mathbb{N} : \ \forall q \in \mathbb{N},\ \exists(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{N}^s,\ n \equiv x_1^3 + \cdots + x_s^3 \pmod q\}$$

と定義する．あとで関係する $s \geq 5$ の場合に限って具体的に書くと，

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_5 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2),\ n \not\equiv 0, \pm 2 \ (\mathrm{mod}\ 9),\ n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)\},\\
\mathcal{N}_6 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2),\ n \not\equiv \pm 1 \ (\mathrm{mod}\ 9)\},\\
\mathcal{N}_7 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2),\ n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 9)\},
\end{aligned}$$

であり，$s \geq 8$ に対しては，$\mathcal{N}_s = \{n \in \mathbb{N} : \ n \equiv s \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$ である．

自然数 n を s 個の素数の3乗の和として

$$n = p_1^3 + \cdots + p_s^3 \tag{4}$$

と表す問題を考えるとき，$\mathcal{N}_s$ に属す n に限って考えるのが自然なのである．これは例えば，$s = 9$ のとき，$n \notin \mathcal{N}_9$ なら n は偶数であるが，その n が9個の素数の3乗の和として(4)の形で表されれば，(4)の右辺の少なくとも1つの素数 p_j は2でなければならないから，結局(4)において n を $n - 2^3$ で置き換えて $s = 8$ とした問題に帰着される，というようなことである．

そこで，各 s と実数 X に対して，$n \in \mathcal{N}_s$ かつ $n \leq X$ なる n のうち，s 個の素数の3乗の和で表せないものの個数を $E_s(X)$ とし，それを評価することを考える．Vinogradov が有名な三素数定理を証明した直後，その仕事を基に Hua [4] は，$s \geq 9$ に対しては $E_s(X) \ll 1$ であること，および $5 \leq s \leq 8$ に対しては，任意に固定した正数 A に対して $E_s(X) \ll X(\log X)^{-A}$ であることを示した．よってとくに，十分大きい奇数は必ず9個の素数の3乗の和で表され，10以上の各 s に対しては，十分大きい自然数は全て s 個の素数の3乗の和で表せる．また，$5 \leq s \leq 8$ なら，“ほとんど全ての $\mathcal{N}_s$ の元は s 個の素数の3乗の和であらわせる” と言える．Hua の仕事から70年近くになるが，現在でもこれらの結果における s の制限を改良することはできていない．この問題に circle method を使う限りは，$E_8(X) \ll 1$ を証明することと $E_4(X) = o(X)$ $(X \to \infty)$ を証明することは，ほとんど同じことと言えるが，現在の技術ではまだまだ難しいように感じられる．

しかし，$5 \leq s \leq 8$ に対する $E_s(X)$ の評価の改良は可能で，この方向の結果が，今回の研究集会での筆者の発表のテーマであった．ここではまずそれらの結果を，

$$E_s(X) \ll X^{\theta_s}$$

という形の評価が示された θ_s の値を次の表で記すことによって紹介し，そのあとでそれぞれの結果について少々述べることにする．次の表中の θ_s の欄のカッコ内にある近似値は，小数第6位を切り上げてある．

	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
Ren [8] (2000)	152/153 (0.99347)	151/153 (0.98693)	50/51 (0.98040)	149/153 (0.97386)
Wooley [10] (2002)	$35/36+\varepsilon$ (0.97223)	$17/18+\varepsilon$ (0.94445)	$23/36+\varepsilon$ (0.63889)	$11/36+\varepsilon$ (0.30556)
Kawada (unpublished, 2003)	125/132 (0.94697)	239/264 (0.90531)	81/132 (0.61364)	37/132 (0.28031)
Kumchev [7] (to appear)	79/84 (0.94048)	31/35 (0.88572)	17/28 (0.60715)	23/84 (0.27381)

一番上の Ren [8] の仕事の主要な点は，Dirichlet の L 関数の零点密度評価などを駆使し，circle method の応用の際の major arcs を広くとったところにある．前節で述べた Kumchev の結果(3) の右辺第2項の改良は，こういう風に major arcs を広くとるための議論を，非常に楽にしてくれることになる．Ren [8] は $6 \leq s \leq 8$ に対する結果は記さなかったが，彼の θ_5 についての結果と circle method に関する良く知られた手法により，その範囲の s に対して上の表にある結果が簡単に従う．

Wooley [10] は Ren の結果を大きく改良したが，とくに $s=7,8$ の場合の改良は画期的である．彼は minor arcs 上の積分に対する新しい扱い方を発見し，それがこれらの大幅な改良の主な原因であるのだが，彼のその方法についてはここでは触れない．前節で述べた彼の $f_3(\alpha)$ に対する評価も，もちろんここで役に立っている．彼が用いたそれより良い $f_3(\alpha)$ の評価(2) を筆者は得たから，それを使えば彼の θ_s の値を改良できるのは当然である．上の "Kawada" の行に書いた結果は，やはり 2003 年の 2 月に得たものだが，しかし，それらは単に $f_3(\alpha)$ の評価の改良だけから従うものではない．$f_3(\alpha)$ の評価から $E_s(X)$ の評価を導く Wooley の議論の中に，篩の方法を組み入れることにより，さらにある程度の得を稼いだ結果である．

そして最後の行が，Kumchev の $f_3(\alpha)$ の評価(3) を用いた，彼の結果である．筆者の結果と同様，篩の方法も使っている．篩の方法を使うと，ある種の almost prime の密度と関係する多重積分を含む方程式の解として，θ_s の最良の値が決められることになるため，その最良の値を初等関数等で書くことができない．上の表の Kumchev の結果として書かれている分数は，彼が論文(7) に記したものだが，その分数自身が近似値であり，実際にはそれらよりもほんの少し小さい値が得られているのである．

結局今回は残念なことになったわけではある．いい勉強をした，と言うべきところであろう．ま，こういう分野は，circle method や篩の方法の使い方など，技術的にも面白いところが多いと感じているから，なんにしてもこれからもがんばってみたいと思っているところである．

References

[1] R. C. Baker and G. Harman, On the distribution of αp^k modulo one, Mathematika 38 (1991), 170-184.

[2] A. Ghosh, The distribution of αp^2 modulo one, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981), 252-269.

[3] G. Harman, Trigonometric sums over primes, I, Mathematika 28 (1981), 249-254.

[4] L. K. Hua, On the representation of numbers as the sums of the powers of the primes, Math. Z. 44 (1938), 335-346.

[5] K. Kawada and T. D. Wooley, On the Waring-Goldbach problem for fourth and fifth powers, Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001), 1-50.

[6] A. V. Kumchev, On Weyl sums over primes and almost primes, preprint.

[7] A. V. Kumchev, On the Waring-Goldbach problem: Exceptional sets for sums of cubes and higher powers, to appear in Canad. J. Math.

[8] Xiumin Ren, The Waring-Goldbach problem for cubes, Acta Arith. 94 (2000), 287-301.

[9] R. C. Vaughan, On the distribution of αp modulo one, Mathematika 24 (1977), 136-141.

[10] T. D. Wooley, Slim exceptional sets for sums of cubes, Canad. J. Math. 54 (2002), 417-448.